جامعة البعث
كلية العلوم



قسم الرياضيات
السنة الثانية

العام الدراسي : 2017 / 2018

طبولوجيا عامة (١)

المحاضرة النظرية الثانية

(٢)

إعدَاد :

داني محفوض – وهب الحسن

Facebook: Dani Mahfoud
Facebook: Wahab Al-Hasan

نبدأ بهذه المحاضرة بدراسة المفهوم الأول من مفاهيم الطبولوجيا ...

الفضاء المتري

مفهوم الفضاء المتري :

لتكن لدينا المجموعة الغير خالية X ، و لنأخذ مجموعة الجداء الديكارتي لمجموعة X مع نفسها .

أي لنأخذ المجموعة : $X \times X = \{(x,y) : x,y \in X\}$

و لنأخذ الدالة التي مجموعة تعريفها (منطلقها) هي مجموعة الثنائيات $X \times X$ (أي مجموعة الجداء الديكارتي لـ X مع نفسها) ، وتأخذ قيمها (مستقرها) في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ولنرمز لها بالرمز d .

*أي أخذنا الدالة : $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

نسمي الدالة d دالة مسافة (أو دالة مترك) إذا حققت الشروط الثلاث الآتية :

الشرط الأول : إن المسافة (البعد) بين أي نقطتين من المجموعة X هي مقدار موجب أو يساوي الصفر .

متى تكون المسافة مقدار موجب؟ عندما تكون النقطتين اللتين ندرس بينهما المسافة مختلفتين عن بعضيهما .

متى تكون المسافة تساوي صفر؟ عندما تكون النقطتين منطبقتين ، فكما نعلم لا يوجد مسافة بين النقطة ونفسها !

كيف نرمز رياضياً للشرط الأول؟

★ عندما نريد أن نعبر عن المسافة بين النقطة x و النقطة y ، نكتب: $d(x,y)$

★ نكتب الشرط الأول كمايلي:

$d(x,y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y \quad \forall x,y \in X$ | $d(x,y) \geq 0$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x,y \in X$

الشرط الثاني: إن المسافة بين أي نقطة x و أي نقطة y هي نفسها المسافة بين النقطة y و النقطة x ، حيث النقطتين x و y من المجموعة X .

نرمز لذلك بالشكل: $d(x,y) = d(y,x)$

الشرط الثالث: إذا كان لدينا ثلاث نقاط مختلفة عن بعضها x و y و z من المجموعة X ، فإن المسافة بين النقطة x و النقطة y أصغر تماما من الجمع بين المسافتين: المسافة بين x و z و المسافة بين y و z .

ونرمز للذلك بالشكل: $d(x,y) < d(x,z) + d(y,z)$

☀ و إذا كانت النقاط الثلاث x و y و z تقع على استقامة واحدة ، ستكون المسافة بين x و y تساوي مجموع المسافتين: المسافة بين x و z و المسافة بين y و z ، أي ←

أي : $d(x,y) = d(x,z) + d(y,z)$

ذلك ما كنّا نسميه في المرحلة الإعدادية بمتراجحة المثلث : (أي ضلع من المثلث طوله أصغر أو يساوي (لا يزيد) مجموع طولي الضلعين الآخرين) ، و ذلك هو المعنى الهندسي للشرط الثالث .

إذاً : إذا حققت الدالة : $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$
الشروط الثلاث السابقة نسميها دالة مسافة .

و الآن : ما هو الفضاء المتري ؟

إنّ المجموعة X مع دالة المسافة d ، المعرفة الجداء الديكارتي بينها و بين نفسها (بين X و X) ، تسمى فضاءً مترياً ، و عندما نريد أن نقول أنه لدينا الفضاء المتري الذي مجموعته X و دالة مسافته هي d ، نرمز لما سبق بالرمز (الثنائية) : (X, d)

ملاحظة : يمكن أن نلغي الشرط الأول ، و ذلك عندما يكون مستقر الدالة d هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة .

★ أي تكون الدالة d بالشكل : $d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$

خلاصة مفهوم الفضاء المتري :

لتكن X مجموعة ما و لتكن d دالة معرفة على $X \times X$

وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$: $d: X \times X \to \mathbb{R}$

$(x,y) \to d(x,y)$

نسمي d دالة مسافة (متريك) إذا حققت الشروط :

① $d(x,y) \geq 0$

$* \; d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \; ; \; \forall x,y \in X$

② $d(x,y) = d(y,x)$

③ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \; ; \; x,y,z \in X$

إن المجموعة X مع الدالة d تسمى فضاءً متريا، ونرمز لذلك بالرمز : (X,d)

لندرس مثال عن الفضاء المتري : « المثال الأول »

لنأخذ $X = \mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولنعرف الدالة d التي مجموعة تعريفها هي مجموعة الثنائيات $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، و قاعدة ربطها هي : $d(x,y) = |x-y|$

أي : $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

حيث : $d(x,y) = |x-y|$ ، x و y عددين حقيقيين.

لنثبت أن d هي دالة مسافة و ذلك بأن نتحقق من صحة الشروط الثلاث (موضوعات المسافة)

$\longleftarrow$

الشرط الأول: $x \neq y \;;\; d(x,y) = |x-y| > 0$ *

وذلك بحسب القيمة المطلقة لعدد حقيقي.

$x = y \;;\; d(x,y) = |x-x| = |y-y| = 0$ *

إذاً: الشرط الأول محقق وضوحاً.

الشرط الثاني: $d(x,y) = d(y,x)$

البرهان: $d(x,y) = |x-y| = |-(-x+y)|$

$= |-x+y| = |y-x| = d(y,x)$

إذا الشرط الثاني محقق.

الشرط الثالث: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

البرهان: $d(x,y) = |x-y|$

ولو أضفنا z وطرحنا z في مضمون القيمة المطلقة

فيصبح لدينا:

$d(x,y) = |x - y + z - z| = |x - z + z - y|$

$= ||x-z| + |z-y||$

ونعلم أنه من خواص القيم المطلقة: إن القيمة المطلقة لمجموع مقدارين أصغر أو تساوي مجموع القيمتين المطلقتين لهذين المقدارين.

أي أنه: $|(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$

$\Rightarrow \qquad \leq d(x,z) + d(z,y)$

إذاً: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

إذاً: الشرط الثالث محقق.

إذاً الشروط الثلاث محققة ، وبالتالي إن الدالة d هي دالة مسافة ، وَ هي معرفة على المجموعة $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إذاً $\mathbb{R}$ هو فضاء متري مع الدالة d ، وَ نسميه الفضاء المتري الحقيقي المألوف وَ نرمز له بالرمز $(\mathbb{R},|\,|)$.

سنكمل في المحاضرة القادمة دراسة أمثلة أخرى عن الفضاء المتري ...

انتهت المحاضرة الثانية